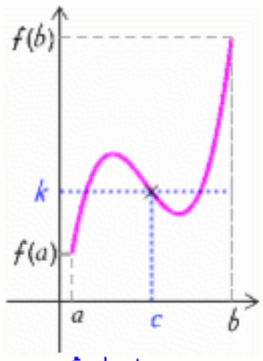
## V. Image d'un intervalle par une fonction continue

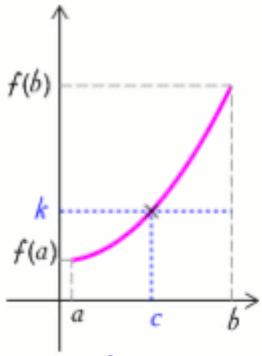
Activité 1 page 12.

Théorème :
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

*Théorème des valeurs intermédiaires :*
Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre $a$ et b tel que $f(c) = k$
On peut aussi l'exprimer sous la forme :
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre $a$ et b.
En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.
Si de plus $f$ est strictement monotone sur I, alors c est unique.



f n'est pas strictement monotone



f est strictement monotone

Activités 4 et 5 page 13.

Conséquence :
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle I.
Si $f$ ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Exercice :
Etudier le signe de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} + 3x$ sur son domaine de définition.

*Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :*
Activité 7 page 15.

Théorème :
Si $f$ est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [m,M]$
Où m est le minimum de $f$ sur $[a,b]$ et M est le maximum de $f$ sur $[a,b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :
* Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ ( b fini ou infini ).
  Si $f$ est croissante et majorée alors $f$ possède une limite finie en b.
  Si $f$ est croissante et non majorée alors $f$ tend vers $+\infty$ en b.
* Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de type $]a,b]$ ( $a$ fini ou infini ).
  Si $f$ est décroissante et minorée alors $f$ possède une limite finie en $a$ .
  Si $f$ est décroissante et non minorée alors $f$ tend vers $-\infty$ en $a$.